# Энергетические характеристики сигналов. Спектральная плотность энергии

## Содержание





## Энергия и средняя мощность сигналов

Пусть дан некоторый сигнал $s(t)$, который характеризует изменение напряжения или силы тока во времени. Тогда $p(t) = s^2(t)$ будет определять мгновенную мощность, выделяемую на сопротивлении 1 Ом.

Проинтегрируем мгновенную мощность $p(t)$ на некотором интервале времени $[t_0,\, t_1]$ и получим энергию сигнала на данном интервале:

$$E = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} s^2(t)\, dt. \tag{1}$$

Тогда средняя мощность $P_{\text{ср}}$ сигнала $s(t)$ на данном интервале времени равна:

$$P_{\text{ср}} = \frac{E}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} s^2(t)\, dt. \tag{2}$$

Если сигнал $s(t)$ является периодическим, то среднюю мощность можно получить путем усреднения на одном периоде повторения сигнала. В случае абсолютно-интегрируемого непериодического сигнала $s(t)$, интервал интегрирования $[t_0,\, t_1]$ может быть расширен на всю ось времени:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt.$$

(3)

Можно заметить, что средняя мощность абсолютно-интегрируемого непериодического сигнала $s(t)$ равна нулю при усреднении на бесконечном интервале времени. Аналогично, энергия периодического сигнала на всей оси времени равна бесконечности.

Таким образом, периодические сигналы, повторяющиеся на всей оси времени мы можем характеризовать конечной средней мощностью $P_{\text{ср}}$, поскольку их энергия бесконечна. Непериодические сигналы характеризуются конечной энергией $E$, потому что их средняя мощность на всей оси времени равна нулю.

Выражения (1)–(3) справедливы и для комплексного сигнала $s(t)$. В этом случае, мгновенную мощность можно определить как $p(t) = |s(t)|^2 = s(t)s^*(t)$.

**Скалярное произведение сигналов. Обобщенная формула Рэлея**

Пусть даны два сигнала $a(t)$ и $b(t)$, в общем случае комплексные. Скалярным произведением сигналов называется величина равная:

$$\big\langle a(t),\, b(t) \big\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) b^*(t)\, dt.$$

(4)

Интеграл (4) возвращает одно число (скаляр), в общем случае комплексное.

Заметим, что скалярное произведение сигнала $a(t)$ с самим собой возвращает энергию данного сигнала:

$$\big\langle a(t),\, a(t) \big\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) a^*(t)\, dt = E.$$

(5)

Тогда скалярное произведение (4) можно трактовать как величину взаимной энергии сигналов $a(t)$ и $b(t)$, т.е. степень взаимного влияния одного сигнала на другой. Если два сигнала $a(t)$ и $b(t)$ имеют нулевое скалярное произведение, то говорят, что они ортогональны.

Подставим в (4) вместо $b(t)$ обратное преобразование Фурье его спектральной плотности $B(\omega)$. Тогда:

$$\langle a(t),\, b(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\exp(j\omega t)\, d\omega \right)^{*} dt.$$

(6)

Поменяем в (6) порядок интегрирования:

$$\langle a(t),\, b(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B^{*}(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} a(t)\exp(-j\omega t)\ dt}_{A(\omega)}\ d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B^{*}(\omega)A(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\langle A(\omega),\, B(\omega)\rangle.$$

(7)

Можно сделать вывод: скалярное произведение сигналов во временно́й области, с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$, равно скалярному произведению спектральных плотностей данных сигналов. Выражение (7) носит название обобщенной формулы Рэлея [1, стр. 67].

**Равенство Парсеваля**

Ранее мы уже рассматривали равенство Парсеваля,

связывающее среднюю мощность периодического сигнала. Для непериодических сигналов мы можем получить аналогичное равенство энергии сигнала во времени и в частотной области. Для этого в обобщенную формулу Рэлея подставим $b(t) = a(t)$ и получим:

$$E = \langle a(t),\, a(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle A(\omega),\, A(\omega)\rangle,$$

(8)

или с учетом (4) равенство Парсеваля [2, стр. 49]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2\, d\omega.$$

(9)

Таким образом, энергия сигнала во временно́й и частотной областях равна с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$.

Если в выражениях (7)–(9) использовать частоту $f = \frac{\omega}{2\pi}$, выраженную в герц, вместо циклической частоты $\omega$, измеряемой в единицах рад/с, то $d\omega = 2\pi\, df$ и множитель $\frac{1}{2\pi}$ сокращается:

$$\langle a(t),\, b(t)\rangle = \langle A(f),\, B(f)\rangle,$$

(10)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2\, df.$$

(11)

**Спектральная плотность энергии сигнала**
При рассмотрении предельного перехода к преобразованию Фурье

было введено понятие спектральной плотности сигнала и была приведена аналогия поясняющая понятие спектральной плотности, и ее отличие от спектра периодического сигнала.

Из равенства (9) следует, что энергия сигнала $E$ может быть представлена как интеграл $|A(\omega)|^2$ по всей оси частот:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2\, d\omega.$$

(12)

Тогда использую ту же аналогию, что и в разделе «Преобразование Фурье непериодических сигналов» можно заключить, что $|A(\omega)|^2$ представляет собой спектральную плотность энергии сигнала. Проинтегрировав $|A(\omega)|^2$ по всей оси $\omega$, мы получим полную энергию сигнала, равно как проинтегрировав плотность стержня по длине мы получим полную массу. Спектральная плотность энергии $|A(\omega)|^2$ представляет собой квадрат АЧХ сигнала. Кроме того $|A(\omega)|^2$ является вещественной неотрицательной функцией частоты $\omega$. Спектральная плотность энергии сигнала измеряется в единицах джоуль на герц (Дж/Гц) или ватт, умноженный на секунду в квадрате (Вт·с$2$).

Сделаем важное замечание. Спектральная плотность энергии игнорирует ФЧХ сигнала. Тогда можно заключить, что одной и той же спектральной плотности энергии могут соответствовать множество различных сигналов, имеющих одинаковую АЧХ и различные ФЧХ.

Спектральные плотности сигналов имеют убывающий по частоте характер

,

и на практике анализ поведения убывающей спектральной плотности с ростом частоты имеет важное значение. Однако графический анализ бывает затруднителен ввиду высокой скорости убывания спектральной плотности по частоте, а в случае спектральной плотности энергии затруднителен вдвойне, поскольку возведение АЧХ в квадрат только ускоряет убывание. Поэтому широкое распространение получило представление спектральной плотности энергии в логарифмическом масштабе, выраженной в единицах децибел (дБ):

$$|A(\omega)|^2 = 10\lg\left(|A(\omega)|^2\right) = 20\lg\left(|A(\omega)|\right), \text{ дБ}.$$

(13)

В качестве примера на рисунке 1 приведены спектральные плотности энергии прямоугольного, треугольного, двустороннего экспоненциального и гауссова импульсов в линейном и логарифмическом масштабе.

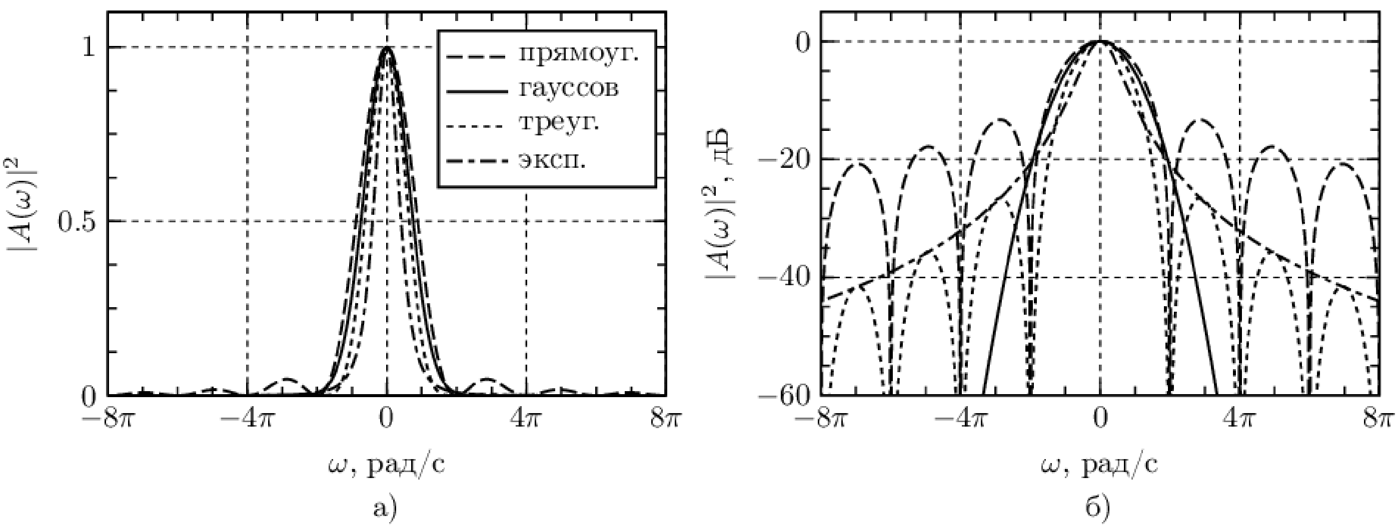


*Рисунок 1. Спектральная плотность энергии некоторых сигналов*
*а — в линейном масштабе; б — в логарифмическом масштабе*

Как видно из рисунка 1а, спектральные плотности энергии импульсов в линейном масштабе практически сливаются и очень сложно различимы.

В логарифмическом масштабе (рисунок 1б), спектральные плотности энергии обнаруживают значительные отличия. Треугольный и экспоненциальный импульсы имеют одинаковую скорость убывания спектральной плотности энергии, а прямоугольный импульс имеет очень медленное затухание спектральной плотности энергии с ростом частоты. Гауссов импульс, напротив, отличается очень быстрым затуханием $|A(\omega)|^2$.

Логарифмическая шкала представления спектральной плотности энергии оказывается удобной при сравнении характеристик сигналов. Если энергии двух сигналов отличаются в 100 раз, то в логарифмической шкале отношение их энергий составляет 20 дБ. Если же энергии отличаются в 1000000 раз, то в логарифмической шкале это соответствует 60 дБ. Удвоение энергии сигнала, в логарифмической шкале соответствует прибавлению 3 дБ.

## Выводы

В данном разделе мы рассмотрели энергетические характеристики периодических и непериодических сигналов. Мы показали, что периодические сигналы имеют бесконечную энергию, но конечную среднюю мощность. Средняя мощность непериодических сигналов стремится к нулю, а их энергия конечна.

Было введено понятие скалярного произведения сигналов и получена обобщенная формула Релея,связывающая скалярное произведение во временной и частотной областях.

Установлено равенство Парсеваля для непериодических сигналов, как частный случай формулы Релея.

Введено понятие спектральной плотности энергии как квадрата модуля спектральной плотности сигнала. Также рассмотрено представление спектральной плотности энергии в линейном и логарифмическом масштабе для различных сигналов.

**Вопросы, замечания и пожелания вы можете оставить на**
странице обсуждения статьи

## Смотри также

Преобразования Фурье непериодических сигналов
Свойства преобразования Фурье
Спектральные плотности некоторых сигналов



## Список литературы

*[1] Баскаков, С.И.* **Радиотехнические цепи и сигналы.** Москва, ЛЕНАНД, 2016, 528 с. ISBN 978-5-9710-2464-4

*[2] Гоноровский И.С.* **Радиотехнические цепи и сигналы** Москва, Советское радио, 1977, 608 с.

*[3] Bracewell R.* **The Fourier Transform and Its Applications** McGraw-Hills, 1986, 474 с. ISBN 0-07-007-015-6

Последнее изменение страницы: 12.05.2022 (19:42:49)
Страница создана Latex to HTML translator ver. 5.20.11.14